

Αλγεβρικές Δομές I (2018-2019)

Φροντιστηριακές ασκήσεις #6

1. Σε κάθε μια από τις επόμενες περιπτώσεις να εξεταστεί αν η απεικόνιση που ορίζεται είναι ομομορφισμός ομάδων και αν είναι να υπολογιστεί ο πυρήνας της:

(1) $\phi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \phi(k) = k - 1.$

(2) $\phi : (\mathbb{R}^*, \cdot) \rightarrow (\mathbb{R}^*, \cdot), \phi(a) = |a|.$

(3) $\phi : S_3 \rightarrow S_3, \phi(a) = a^{-1}.$

(4) $\phi : \mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_2, \phi([a]_6) = [a]_2.$

2. Έστω G ομάδα. Ναδειχθεί ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(1) Η G είναι αβελιανή.

(2) Η απεικόνιση $f : G \rightarrow G, f(a) = a^{-1}$ είναι ομομορφισμός.

(3) Η απεικόνιση $h : G \rightarrow G, h(a) = a^2$ είναι ομομορφισμός.

(4) Η απεικόνιση $r : G \times G \rightarrow G, r(a, b) = ab$ είναι ομομορφισμός.

3. (1) Δείξτε ότι η απεικόνιση $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(a) = 2a$ είναι μονομορφισμός που δεν είναι επί.

(2) Δείξτε ότι η απεικόνιση $h : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*, h(a) = a^2$ είναι επιμορφισμός που δεν είναι ένα προς ένα.

4. Δώστε παράδειγμα μη-τετριμμένου ομομορφισμού ή δικαιολογήστε γιατί δεν υπάρχει μη-τετριμμένος ομομορφισμός $f : G \rightarrow H$ όταν

$$f : \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_5,$$

$$f : \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_4,$$

$$f : \mathbb{Z}_3 \rightarrow \mathbb{Z},$$

$$f : \mathbb{Z}_3 \rightarrow S_3,$$

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow S_3,$$

$$f : S_3 \rightarrow S_4$$

5. (1) Υπολογίστε το σύνολο των ομομορφισμών $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}.$

(2) Υπολογίστε το σύνολο των ομομορφισμών $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_6.$

(3) Υπολογίστε το σύνολο των ομομορφισμών $\mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}.$

(4) Υπολογίστε το σύνολο των ομομορφισμών $\mathbb{Z}_{25} \rightarrow \mathbb{Z}_{15}.$

(5) Υπολογίστε το σύνολο των ομομορφισμών $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}.$

(6) Υπολογίστε το σύνολο των ομομορφισμών $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}.$

6. Έστω ότι G είναι μια άπειρη ομάδα. Δείξτε ότι η G είναι κυκλική αν και μόνο αν κάθε υποομάδα $H \neq \{e\}$ της G είναι ισόμορφη με την G .